DURÉE : 4 heures

Introduction

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls. Soit φ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le but du problème est l'étude de certaines propriétés de l'équation différentielle :

$$y'' + \varphi y = 0. \tag{1}$$

On appelle solution de (1), toute application u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, qui vérifie :

$$u''(x) + \varphi(x)\, u(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

On note E l'ensemble des solutions de (1). On rappelle que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et que, pour tout x_0 appartenant à $\mathbb{R}$, l'application :

$$\begin{aligned} F_{x_0} : E &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\longmapsto (u(x_0),\, u'(x_0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En particulier, pour tout (x_0, a, b) appartenant à $\mathbb{R}^3$, il existe un et un seul u appartenant à E tel que :

$$u(x_0) = a \quad \text{et} \quad u'(x_0) = b.$$

PREMIÈRE PARTIE

I.1. Soit u_0 et v_0 les éléments de E définis par :

$$u_0(0) = 1, \quad u_0'(0) = 0, \quad v_0(0) = 0, \quad v_0'(0) = 1.$$

Vérifier que (u_0, v_0) est une base de E, qui sera, dans la suite, notée $\mathscr{B}_0$.

I.2. Soit (u, v) appartenant à E^2, on note $C_{u,v}$ l'application :

$$\begin{aligned} C_{u,v} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto u(x)\, v'(x) - u'(x)\, v(x). \end{aligned}$$

a. Montrer que $C_{u,v}$ est constante.

Dans la suite, on notera : $\Delta(u, v) = C_{u,v}(x)$, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

b. Montrer que l'application Δ : $\begin{aligned} E^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \Delta(u, v) \end{aligned}$ est surjective.

c. Vérifier que pour tout (u, v, w) appartenant à E^3, l'application $\Delta(u, v)\, w + \Delta(v, w)\, u + \Delta(w, u)\, v$ est nulle.

d. Montrer que (u, v) est une base de E, si et seulement si $\Delta(u, v) \neq 0$.

I.3. On suppose, dans cette question, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt$ est convergente.

a. Soit u une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $u'(x)$ ait une limite finie l quand x tend vers $+\infty$. Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que $\frac{u(x)}{x}$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$.

En déduire que, si u est un élément de E, borné au voisinage de $+\infty$, $u'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

b. Soit (u, v) une base de E, montrer que l'une au moins des deux applications u et v n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$.

DEUXIÈME PARTIE

Soit ψ une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement monotone, telle que $\varphi \circ \psi = \varphi$. On considère les deux propriétés suivantes :

(*) Pour tout u appartenant à E, $u \circ \psi$ appartient à E.

(**) ψ est une isométrie de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

pour tout (x, y) appartenant à $\mathbb{R}^2$, $|\psi(x) - \psi(y)| = |x - y|$.

II.1. *a.* Montrer qu'une isométrie strictement monotone de $\mathbb{R}$ est dérivable et calculer la dérivée.

b. En déduire que (**) implique (*).

II.2. On suppose dans *a.*, *b.*, *c.*, que ψ vérifie la propriété (*).

a. Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ et tout u appartenant à E,

$$\varphi(x)\, u(\psi(x))\,(1 - \psi'^2(x)) + u'(\psi(x))\,\psi''(x) = 0.$$

b. En déduire que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $\psi''(x) = 0$. (On pourra utiliser l'isomorphisme rappelé dans l'introduction avec $x_0 = \psi(x)$.)

c. En supposant, de plus, qu'il existe x_1 tel que $\varphi(x_1) \neq 0$, montrer qu'il existe $\varepsilon = \pm 1$, tel que $\psi'(x) = \varepsilon$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

d. Montrer que, si φ n'est pas l'application nulle, (*) implique (**).

II.3. *a.* Montrer que, si ψ vérifie (**), on définit un isomorphisme L_ψ de E, en posant $L_\psi(u) = u \circ \psi$.

b. Écrire la matrice de L_ψ dans la base $\mathscr{B}_0$ de 1.1. En déduire que le déterminant de L_ψ vaut $\psi'(0)$.

TROISIÈME PARTIE

III.1. Soit F l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y'^2 + \varphi = 0 \qquad (2)$$

IV.1. On suppose, dans la question IV.1., que φ est périodique de période 1.

a. Pour toute base $\mathscr{B} = (u_1, v_1)$ de E, on considère la matrice :

c'est-à-dire l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables, qui vérifient :

$$f''(x) + (f'(x))^2 + \varphi(x) = 0$$

pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

Montrer que l'ensemble des éléments de E qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$ est :

$$\{\varepsilon \exp(f) \mid \varepsilon = \pm 1, f \in F\}.$$

III.2. Soit u un élément de E qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, montrer que l'application :

$$v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto u(x) \int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2}$$

est un élément de E, puis que (u, v) est une base de E.

III.3. On dit qu'une base (u, v) de E est adaptée si u est paire et v impaire.

a. Montrer que, si (u, v) est une base adaptée de E, l'ensemble des bases adaptées de E est :

$$\{(\lambda u, \mu v) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{*2}\}.$$

b. Montrer que si E admet une base adaptée, φ est paire.

c. Réciproquement, si φ est paire, construire, à partir de la base $\mathscr{B}_0$ de E introduite en I.1., une base adaptée de E.

(On pourra considérer l'isométrie de $\mathbb{R}$, $\psi : x \longmapsto -x$.)

III.4. Déterminer toutes les bases adaptées de E dans les cas suivants :

a. φ est une application constante.

b. φ est l'application : $x \longmapsto -1 - x^2$.

c. φ est l'application : $x \longmapsto -1 + \cos x + \cos^2 x$.

(On pourra, en *b.* et *c.*, utiliser III.1. et III.2. et donner les solutions sous la forme d'une intégrale.)

QUATRIÈME PARTIE

Une application u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite pseudo-périodique, s'il existe un réel λ tel que :

$$u(x + 1) = \lambda u(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ appartenant à } \mathbb{R}.$$

$$\mathscr{U}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & v_1(x) \\ u_1'(x) & v_1'(x) \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathscr{U}_{\mathscr{B}}(x)$ est inversible et que $M_{\mathscr{B}}(x) = (\mathscr{U}_{\mathscr{B}}(x))^{-1}\, \mathscr{U}_{\mathscr{B}}(x + 1)$ est de déterminant 1.

b. Vérifier que l'isométrie de $\mathbb{R}$, $\psi : x \longmapsto x + 1$ possède les propriétés (*) et (**) de II. On pose $u_2 = u_1 \circ \psi$ et $v_2 = v_1 \circ \psi$. Exprimer $M_{\mathscr{B}}(x)$ en fonction de u_1, u_2, v_1, v_2 et de l'application Δ de I.2. En déduire, en utilisant I.2.*c.*, que $M_{\mathscr{B}}(x)$ est indépendante de x et est la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de l'isomorphisme L_ψ défini en II.3.

c. Montrer qu'un élément non nul de E est pseudo-périodique si et seulement s'il est vecteur propre de L_ψ, associé à une valeur propre réelle.

IV.2. Soit l'application $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où k est un réel non nul.
$x \longmapsto e^{kx + \sin 2\pi x}$

a. Montrer que u est pseudo-périodique et est solution d'une équation différentielle (1) : $y'' + \varphi y = 0$ où φ est périodique de période 1.

b. Montrer que $h(x) = e^{k}\int_0^{x+1} \frac{dt}{(u(t))^2} - e^{-k}\int_0^{x} \frac{dt}{(u(t))^2}$ est indépendant de x.

c. Posons, comme à la question III.2., $v(x) = u(x)\int_0^{x} \frac{dt}{(u(t))^2}$.

Montrer que $v(x + 1) = J\, e^{k}\, u(x) + e^{-k}\, v(x)$, où $J = \int_0^{1} \frac{dt}{(u(t))^2}$.

d. ψ étant l'isométrie de $\mathbb{R}$ défini en IV.1.*b.*, écrire la matrice de L_ψ dans la base (u, v). En déduire, en utilisant IV.1.*c.*, une solution pseudo-périodique w de (1) telle que (u, w) soit une base de E. Donner toutes les solutions pseudo-périodiques de (1).

CINQUIÈME PARTIE

On suppose, dans cette partie, que $\varphi(x)$ est négatif ou nul pour tout x de $\mathbb{R}$.

V.1. Soit x_0 un nombre réel et soit w un élément de E tel que $w(x_0) = 0$ et $w'(x_0) > 0$.

a. Montrer qu'il existe $x_1 > x_0$ tel que $w(x) > 0$ pour tout x de $]x_0, x_1]$. On pose :

$$A = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > x_0 \text{ et } w(t) \geqslant 0, \forall\, t \in [x_0, x]\}.$$

Supposant A fini, dresser le tableau de variation de w sur $[x_0, A]$ et montrer que $w(A)$ est strictement positif. En déduire que A est nécessairement $+\infty$.

b. Montrer que $w'(x)$ est positif sur $[x_0, +\infty[$ puis, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au point x_0, que $w(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Montrer qu'il existe $x_2 < x_0$ tel que $w'(x) > 0$ pour tout x de $]x_2, x_0]$. On pose :

$$B = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid x < x_0 \quad \text{et} \quad w'(t) \geqslant 0, \forall\, t \in [x, x_0]\}.$$

Supposant B fini, montrer que $w'(B) = 0$ et $w(B) < 0$. En déduire que B est nécessairement $-\infty$.

d. Montrer que w est une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$.

V.2. On donne quatre nombres réels x, y, α, β. On suppose $x < y$.

a. Soit (v, w) appartenant à E^2 tel que $v(x) = \alpha$, $w(x) = 0$, $w'(x) = 1$.
Montrer qu'il existe un élément u de E de la forme $v + \lambda w$ tel que :

$$u(x) = \alpha \quad \text{et} \quad u(y) = \beta.$$

b. Montrer enfin qu'il existe un et un seul élément u de E tel que :

$$u(x) = \alpha \quad \text{et} \quad u(y) = \beta.$$